

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Рівняння з відокремлюваними змінними.

Мета сформувані у студентів практичні навички визначення і обчислення диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними, знаходження їх загальних та частинних розв'язків

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 203 [5], с. 271	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.

Навчальні матеріали

Приклади розв'язування завдань.

1) Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx; \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx;$$
$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

2) Розв'язати рівняння $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при умові $y(1) = 0$.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$
$$ydy + xe^y dx = 0; \quad \frac{y}{e^y} dy = -x dx;$$
$$\int \frac{y}{e^y} dy = -\int x dx;$$

Інтеграл, який стоїть в лівій частині будемо обчислювати частинами.

$$\int ye^{-y} dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad e^{-y} dy = dv; \\ du = dy; \quad v = -e^{-y}; \end{array} \right\} = -e^{-y} y - \int -e^{-y} dy = -e^{-y} y - e^{-y} = -e^{-y}(y + 1);$$

$$e^{-y}(y + 1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y + 1) = x^2 + C$$

Якщо $y(1) = 0$, то $2e^0(0 + 1) = 1 + C$; $\Rightarrow 2 = 1 + C$; $\Rightarrow C = 1$;

Звідси, частинний розв'язок : $2e^{-y}(y + 1) = x^2 + 1$.

3) Розв'язати рівняння $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

$$y' + \sin(x + y) - \sin(x - y) = 0$$
$$y' - 2\sin \frac{x - y - x - y}{2} \cos \frac{x - y + x + y}{2} = 0$$
$$y' - 2\sin(-y) \cos x = 0 \quad y' + 2\sin y \cos x = 0$$
$$\frac{dy}{\sin y} = -2\cos x dx; \quad \int \frac{dy}{\sin y} = -2\int \cos x dx;$$

Отримаємо загальний розв'язок: $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = -2\sin x + C$

4) Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$

Відокремлюємо змінні:

$$2xe^{-x^2} + \frac{dy}{ydx} = 0 \quad 2xe^{-x^2} dx + \frac{dy}{y} = 0 \quad \int 2xe^{-x^2} dx + \int \frac{dy}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Отримали загальний інтеграл даного диференціального рівняння. Якщо із цього співвідношення виразити шукану функцію y , то отримаємо загальний розв'язок.

5) Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1) \quad \frac{dy}{y^2 + 1} = x dx \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int x dx;$$

$$\arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, задані деякі початкові умови x_0 і y_0 . Тоді:

$$\arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \Rightarrow C_0 = \arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Отримаємо частинний розв'язок $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + \arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$.

Завдання.

1. Знайти загальний розв'язок рівнянь:

$$1) x^2 dx = 3y^2 dy \quad 2) \sqrt{x} dy = \sqrt{y} dx \quad 3) \frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$$

$$4) xy dx = (1 + x^2) dy$$

$$5) (1 + y) dx = (x - 1) dy$$

$$6) x dx + (y + 1) dy = 0$$

$$7) (x + 2x^3) dx + (y + 2y^3) dy = 0$$

$$8) y' = \frac{y-1}{x+1}$$

$$9) y' = e^{x-y}$$

$$10) y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$$

2. Знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$1) y dy = x dx \quad y = 4 \quad x = -2$$

$$2) \frac{dy}{x^2} = \frac{3dx}{y^2}, \quad y(0) = 1$$

3. Розв'яжіть диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

$$1. xy dx + (x + 1) dy = 0$$

$$2. xy dx + (1 + y^2) \sqrt{1 + x^2} dy = 0$$

$$3. y' = 5\sqrt{y}$$

$$4. y' + y^2 = 1$$

$$5. x^2(y^3 + 5) dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0$$

$$6. y' = 3^{3x+2y}$$

$$7. 4yy' = -\operatorname{tg} x (4 + y^4)$$

$$8. \sqrt{1 - y^2} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0$$

Розв'яжіть задачу Коші.

$$9. \frac{yy'}{x} + e^y = 0, \quad y(1) = 0$$

$$10. \operatorname{tg} y dx - x \ln x dy = 0 \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Однорідні рівняння першого порядку. Рівняння, які приводяться до однорідних.

Мета сформулювати у студентів практичні навички визначення і обчислення однорідних рівнянь першого порядку, знаходження їх загальних та частинних розв'язків

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [1], с. 443 [5], с. 273 [3], с. 204 [4], с. 430	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

1. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

5. Дубовик, В.П. Вища математика:Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали

Приклади розв'язування завдань.

1. Розв'яжіть рівняння:

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Розв'язання: Права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру. Отже, дане рівняння є однорідним.

Нехай $y = tx$, тоді $y' = t'x + t$. Підставивши ці значення у вихідне рівняння, матимемо:

$$t'x + t = \frac{t^2 x^2}{x^2 t - x^2}, \quad t'x + t = \frac{t^2}{t-1}, \quad x \frac{dt}{dx} = \frac{t}{t-1},$$
$$\int \frac{t-1}{t} dt = \int \frac{dx}{x}, \quad t - \ln|t| = \ln|x| + \ln C, \quad t = \ln|Cxt|.$$

Замінивши змінну t на $\frac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл вихідного рівняння:

$$y = x \ln|Cy|.$$

2. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$.

Розв'язання:

Дане рівняння зведемо до однорідного. Знайдемо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Оскільки $\Delta \neq 0$, то зробимо заміну $x = t + \alpha$, $y = v + \beta$.

Для визначення коефіцієнтів α і β складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \end{cases},$$

Її розв'язок - $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Отже,

$$x = t + 1, \quad y = v + 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+1)}{d(t+1)} = \frac{dv}{dt}.$$

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{t+1+2v+2-3}{2t+2-2}, \quad \text{або} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{t+2v}{2t}.$$

Одержане рівняння є однорідним рівнянням. Розв'яжемо його.

$$v = ut, \quad u = u(t), \quad v' = u't + u.$$

Тоді

$$u't + u = \frac{t+2ut}{2t}; \quad u't + u = \frac{1+2u}{2}; \quad u't = \frac{1}{2}; \quad 2 \frac{du}{dt} = \frac{1}{t}; \quad 2du = \frac{dt}{t}.$$

З останнього рівняння знайдемо

$$u = \frac{1}{2} \ln|Ct|, \quad \text{або} \quad v = \frac{1}{2} t \ln|Ct|.$$

Повернувшись до змінних x та y , дістанемо

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \ln|C(x - 1)|, \quad \text{або} \quad y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) \ln|C(x - 1)|.$$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$(2x + 4y + 3)dy - (x + 2y + 1)dx = 0.$$

Розв'язання: Запишемо дане рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$$

Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Тому покладемо $z = x + 2y$. Далі маємо:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2 \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} - 1 \right), \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} - 1 \right) = \frac{z+1}{2z+3}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{4z+5}{2z+3}, \quad \frac{2z+3}{4z+5} dz = dx,$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{4z+5} \right) dz = 2 \int dx, \quad z + \frac{1}{4} \ln|4z+5| = 2x + C/4, \quad 4z + \ln|4z+5| = 8x + C,$$

$\ln|4x + 8y + 5| = 4x - 8y + C$ - загальний інтеграл вихідного рівняння.

Завдання.

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1) $(x + 2y)dx - xdy = 0$

2) $y^2 + x^2 y' = xy y'$

3) $(x + y)dx - xdy = 0$

4) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

5) $y' = 1 + \frac{y}{x}$

6) $xy' = 3y - x$

Домашнє завдання: [1], с. 443

[5], с. 273

[3], с. 204

[4], с. 430

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Практична робота № 1 «Розв'язування однорідних рівнянь та рівнянь з відокремлюваними змінними»

Мета Узагальнити й систематизувати знання студентів з теми «Однорідні рівняння та рівняння з відокремлюваними змінними»

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (письмове опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 203-204 [5], с. 271...275	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

- Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.
- Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
- Дубовик, В.П. Вища математика:Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали

Студентам надаються картки з індивідуальними завданнями з вивченої теми:
«Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння»

Завдання на картках:

Розв'язати наступні рівняння:

- $dy = (2x^2 - 5)dx$ $y = -4$ $x = 1$
- $y' = \frac{y+1}{x}$
- $x^2 dy - \frac{1}{2}y^3 dx = 0$ $y = 1$ $x = -1$

3. $y^2 dx - (x^2 + xy)dy = 0$
4. $y' = \frac{2x+y}{2x} \quad y = 0, \quad x = 1$
5. $4dy = \sqrt[5]{y} dx$
6. $dy = (3x^2 - 2x)dx \quad y = 4 \quad x = 2$
7. $2(xy + y)dx = xdy$
8. $(x^2 - xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$
9. $xy' - y = x + y$
10. $2y' = 3x^2$
11. $(1 + y)dx = 2xdy$
12. $x^5 dy = y^5 dx \quad x = 1, \quad y = 1$
13. $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$
14. $y' = \frac{yx+y^2}{x^2} \quad y = 1, \quad x = 1$
15. $dy = (2x - 4)dx$
17. $y' = 2(y - 3) \quad y = 4, \quad x = 0$
18. $xdy - ydx = ydy$
19. $x^2 dy = (xy - 3y^2)dx$
20. $y' = 5\sqrt{y}$
21. $dy = (4x - 3)dx \quad y = 0 \quad x = 0$
22. $xy' + y = 3$
23. $(x - x^2)ydx = x^2 dy$
24. $xyy' = x^2 + y^2$
25. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$
26. $dy = (8x^2 - 3)dx \quad y = 0 \quad x = 1$
27. $y' = \frac{y+3}{x-2}$
28. $y^2 dx - (x^2 + xy)dy = 0$
29. $y' = \frac{x+y}{x} \quad y = 0, \quad x = 1$
30. $7dy = \sqrt[7]{y} dx$

Домашнє завдання:

[3], с. 203-204

[5], с. 271...275

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь методом варіації довільної сталої та методом Бернуллі

Мета сформулювати у студентів практичні навички знаходження загального і частинного розв'язків лінійного диференціального рівняння 1-го порядку методом варіації довільної сталої та методом Бернуллі

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (фронтальне опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 205 [1], с. 449 [5], с. 275 [4], с. 433	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

1. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
5. Дубовик, В.П. Вища математика:Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали

1) Розв'язати рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = 1$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації.

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln C - \ln x$$

$$y = \frac{C}{x}$$

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

Підставимо у рівняння

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 1$$

$$\frac{C'(x)}{x} = 1$$

$$C'(x) = x$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = \frac{\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)}{x}$$

2) Розв'язати рівняння:

$$y' - \frac{3y}{x} = x^3$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації.

$$y' - \frac{3y}{x} = 0$$

$$y' = \frac{3y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x}$$

$$\ln y = 3 \ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln x^3 + \ln C$$

$$y = Cx^3$$

$$y = C(x)x^3$$

$$y' = C'(x)x^3 + 3C(x)x^2$$

Підставимо у рівняння

$$C'(x)x^3 + 3C(x)x^2 - \frac{3C(x)x^3}{x} = x^3$$

$$C'(x)x^3 = x^3$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = (x + C_1)x^3$$

3) Розв'язати рівняння:

$$y' - y = e^x$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом варіації.

$$y' - y = 0$$

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln y = x + \ln C$$

$$y = Ce^x$$

$$y = C(x)e^x$$

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x$$

Підставимо у рівняння

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^x$$

$$C'(x)e^x = e^x$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = (x + C_1)e^x$$

Завдання.

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

$$1. y' - 2xy = 1 - 2x^2$$

$$2. y' - \frac{y}{x} = x^2$$

$$3. y' - y \tan x = \sin x$$

$$4. y' - \frac{y}{x} = 1$$

$$5. y' - \frac{3y}{x} = x^3$$

$$6. y' + 5y = e^{-2x}$$

Розв'язати рівняння:

$$y' - y = e^x$$

Розв'язування.

Дане диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі.

$$y = uv \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - uv = e^x$$

$$u'v + u(v' - v) = e^x$$

$$v' - v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx$$

$$\ln v = x + \ln C$$

$$v = Ce^x$$

$$v = e^x$$

Підставимо v

$$u'v = e^x$$

$$u'e^x = e^x$$

$$u' = 1$$

$$u = x + C_1$$

Отже, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = (x + C_1)e^x$$

Приклади.

$$1 \quad y' - y/x = x^2$$

$$2 \quad y' - y \cdot \operatorname{ctgx} = 2x \cdot \sin x, \quad y(\pi/2) = 0$$

$$3 \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0$$

$$4 \quad y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2$$

$$5 \quad y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2$$

$$6 \quad y' - \frac{1}{x+1} y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$$

$$7 \quad y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$8 \quad y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi$$

$$9 \quad y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$$

$$10 \quad y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$$

$$11 \quad y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4$$

$$12 \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e$$

$$13 \quad y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$$

$$14 \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$$

$$15 \quad y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6$$

$$16 \quad y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$$

$$17 \quad y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3$$

$$18 \quad y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1$$

$$19 \quad y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$$

$$20 \quad y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}$$

$$21 \quad y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = 2/3$$

$$22 \quad y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3$$

$$23 \quad y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1$$

$$24 \quad y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1$$

$$25 \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = 1/2$$

$$26 \quad y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3$$

$$27 \quad y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$$

$$28 \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$$

$$29 \quad y' - 3x^2 y = x^2 (1 + x^3)/3, \quad y(0) = 0$$

$$30 \quad y' - y \cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1$$

$$31 \quad y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1$$

Домашнє завдання:

[3], с. 205 [1], с. 449

[5], с. 275 [4], с. 433

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Практична робота № 2 «Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку та рівнянь в повних диференціалах»

Мета Узагальнити й систематизувати знання студентів з теми «Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку та рівняння в повних диференціалах»

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (письмове опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с. 205 [1], с. 449 [5], с. 275 [4], с. 433	10хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

1. Макаренко В. О. Вища математика для економістів [Текст] : навч. посіб / В. О. Макаренко. – К.: Знання, 2008. – 517 с.
3. Денисюк, В. П. Вища математика:[Текст] навч. посібник у 4-х ч./ В. П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – ч. 2. – 275 с.
4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
5. Дубовик, В.П. Вища математика:Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали

Студентам надаються картки з індивідуальними завданнями з вивченої теми:
«Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку та рівняння в повних диференціалах»

Завдання на картках:

Знайти частинні похідні за змінними x та y :

1) $u = x^5 - 2x^2y^3 + 2\ln y$;

2) $u = \frac{y}{x+y}$;

3) $u = \cos x - 2x \sin y + y^3$;

4) $u = \frac{x-2y}{x+y}$;

$$5) u = x^{-2} + 2xe^y - 2y^4 ;$$

$$6) u = \frac{2x-y^2}{x^2} ;$$

$$7) u = -3e^y + 2y\sin x + x^5 ;$$

$$8) u = \frac{3y^2-x}{2x+y} ;$$

$$9) u = 2e^x + x^3y - 3y^4 ;$$

$$10) u = \frac{3x+y^3}{y} ;$$

$$11) u = x^5 - 2x^2y^3 + 2\ln y ;$$

$$12) u = \frac{y}{x+y} ;$$

Розв'язати рівняння:

$$1) (\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0 ;$$

$$2) (12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 3)dy = 0 ;$$

$$3) \left(\frac{2}{3}xy^3 + 4y\right)dx + (x^2y^2 + 4x)dy = 0$$

$$4) (e^y + 2xy)dx + (e^y + x)x dy = 0 ;$$

$$5) (x + 2y + 1)dx + (2x - y^2 + 3)dy = 0 ;$$

$$6) (2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0 .$$

$$7) (\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0 ;$$

$$8) (2xy - 5)dx + (x^2 - 4)dy = 0 ;$$

$$9) (2x^2y - 3y^2)dy = (6x^2 - 2xy^2 + 1)dx$$

$$10) (2 - 9xy^2)x dx + (4y^2 - 6x^3)y dy = 0 ;$$

$$11) \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0 ;$$

$$12) (x^2 + y^2 + 1)ydy + (x^2 + y^2 - 1)x dx = 0 .$$

$$13) 3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy ;$$

$$14) (4x^2 + 6xy^2)dx + (4y^3 + 6x^2y)dy = 0 ;$$

$$15) (x + y)dx + (x - y)dy = 0 .$$

$$16) (\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0 ;$$

$$17) (12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 3)dy = 0 ;$$

$$18) \left(\frac{2}{3}xy^3 + 4y\right)dx + (x^2y^2 + 4x)dy = 0 .$$

Розв'язати наступні рівняння:

$$1. xy' - y = x^2$$

$$2. y' + \frac{y}{x} = 3x$$

$$3. y' - \frac{y}{x} = xe^x$$

$$4. xy' + y = x + 1$$

$$5. y' + y = e^{-x}$$

$$6. y' + \frac{3x^2y}{x^3+8} = 1$$

$$7. xy' + x^2y + 2x^2 = 0$$

$$8. y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

$$9. y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

$$10. xy' + y = 3$$

$$11. y' + y = x + 2$$

$$12. y' - \frac{xy}{x^2-9} = x^3$$

$$13. y' - \frac{1}{x}y = x$$

$$14. xy' = x + 2y$$

$$15. y' \cos x = (y+1) \sin x$$

$$16. y' + 2y = 4x$$

$$17. y' = \frac{y}{x} + x$$

$$18. y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$$

Домашнє завдання:

[3], с. 205 [1], с. 449

[5], с. 275 [4], с. 433

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Рівняння, які допускають зниження порядку

Мета сформувані у студентів практичні навички знаходження загального і частинного розв'язків рівнянь, які допускають зниження порядку

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	55хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному</i>

		контролю (письмове опитування), узагальненню висунутих положень
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 455 [5], с. 281	10хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу

Література

- Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
- Дубовик, В.П. Вища математика: Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали

Наприклад:

- Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

$$y''' = e^{2x} + \sin x$$

Розв'язання: Послідовно дістанемо

$$y'' = \int (e^{2x} + \sin x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - \cos x + C_1$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \cos x + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

де C_1, C_2, C_3 - довільні сталі.

Відповідь: $y = \frac{1}{8} e^{2x} + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

- Розв'яжіть рівняння:

$$y''(1 + x^2) = 2xy'$$

Розв'язання: Дане рівняння не містить явно функцію y , тому зробимо заміну

$$y' = z(x), \quad \text{тоді} \quad y'' = z'(x).$$

$$\text{Підставимо: } z'(1 + x^2) = 2xz.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{dx}(1 + x^2) = 2xz$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$\ln|z| = \ln(1+x^2) + \ln|C|$$

$$z = C(1+x^2)$$

Повертаємося до заміни:

$$y' = C(1+x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = C(1+x^2)$$

$$dy = C(1+x^2) dx$$

$$\int dy = \int C(1+x^2) dx$$

$$y = C\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

$$\text{Відповідь: } y = C\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_1$$

3. Розв'язати рівняння та визначити їх тип:

$$1. \quad y''' = -\cos x$$

$$2. \quad y''' = \frac{2}{x^3}$$

$$3. \quad yy'' - (y')^2 = 0$$

$$4. \quad \frac{y''}{y} = y'$$

$$5. \quad y'' = 3\cos 5x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad y' = 0$$

$$6. \quad y'' + 2xy' = 0$$

$$7. \quad y'' + 3 = y'''x$$

$$8. \quad y'' = 6x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad y' = 0$$

$$9. \quad y''' = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0$$

$$10. \quad y^{IV} - \frac{1}{x}y''' = 0$$

$$11. \quad (1+x^2)y'' - 2xy' = 0$$

$$12. \quad xy'' = y' + x^2$$

Домашнє завдання:

[4], с. 455

[5], с. 281

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Мета сформувати у студентів практичні навички знаходження загального і частинного розв'язків лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 4 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	10хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	20хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття
3 Основна частина	110хв	Головне місце приділяється розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (письмове опитування), узагальненню висунутих положень
4 Заключна частина Домашнє завдання: [5], с. 282 [4], с. 470	20хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу

Література

- Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
- Дубовик, В.П. Вища математика: Збірник задач: навч. посіб. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

Навчальні матеріали

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0 \quad y = 1, \quad y' = -6, \quad x = \frac{\pi}{3}$$

Розв'язання:

$$k^2 + 9 = 0 \quad k^2 = -9 \quad k = \pm\sqrt{-9}$$

$$k_1 = 3i, \quad k_2 = -3i$$

$$y = e^{0x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi \\ -6 = -3C_1 \sin \pi + 3C_2 \cos \pi \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

$$y = -\cos 3x + 2 \sin 3x - \text{відповідь.}$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \quad y = 1, \quad y' = -1, \quad x = 0$$

Розв'язання:

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$D = 16 - 20 = -4$$

$$k_1 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

$$k_2 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y' = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ -1 = 2C_1 + C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

$$y = e^{2x}(\cos x - 3 \sin x)$$

3. Розв'язати рівняння:

$$1. y'' + y' - 2y = 0$$

$$2. y'' - 6y' + 8y = 0$$

$$3. y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$4. y'' + 10y' + 25y = 0$$

$$5. y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$6. y'' + 2y' + y = 0$$

$$7. y'' + 4y' + 7y = 0$$

$$8. y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$9. y'' + 4y' + 29y = 0$$

$$10. y'' + y' + y = 0$$

$$11. y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$12. y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$13. y'' - 3y' - 4y = 0$$

$$14. y'' + 8y' + 25y = 0$$

$$15. y'' - y' - 6y = 0$$

$$16. y'' + 2y' + y = 0$$

$$17. y'' + 4y' + 4y = 0 \quad 18. y'' - 2y' + 10y = 0$$

$$19. 4y'' + 4y' + y = 0 \quad 20. y'' + 6y' + 13y = 0$$

Розв'язати рівняння:

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{якщо при } x = 0 \quad y = 1 \quad \text{та при } x = 1 \quad y = 0$$

$$2. \frac{d^2y}{dx^2} = 5 \quad \text{якщо при } x = 2 \quad y = 5 \quad \text{та при } x = 4 \quad y = 11$$

$$3. \frac{d^2y}{dx^2} = x \quad \text{якщо при } x = 1 \quad y = 0 \quad \text{та при } x = 2 \quad y = 2$$

$$4. \frac{d^2s}{dt^2} = t + 1 \quad \text{якщо при } t = 0 \quad s = 2 \quad \text{та } \frac{ds}{dt} = -\frac{11}{6}$$

$$5. \frac{d^2s}{dt^2} = t^2 \quad \text{якщо при } t = 0 \quad s = 0 \quad \text{та } \frac{ds}{dt} = \frac{3}{4}$$

$$6. x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$7. \frac{d^2y}{dx^2} = e^x \quad 8. \frac{d^2s}{dt^2} = 1 - \sin t \quad 9. e^x \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \quad 10. \frac{d^2s}{dt^2} = e^{2t}$$

$$11. y'' + 5y' + 6y = 0 \quad 12. y'' + 3y' - 4y = 0 \quad 13. y'' - 5y' + 2y = 0$$

$$14. y'' + y' - 2y = 0 \quad 15. y'' - 10y' + 25y = 0 \quad 16. y'' + 4y' - 5y = 0$$

$$17. y'' - 7y' + 12y = 0 \quad 18. y'' - 2y' + 10y = 0 \quad 19. y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$20. y'' + 2y' - 3y = 0 \quad 21. y'' + 5y' - 6y = 0 \quad 22. y'' - y' - 2y = 0$$

$$23. y'' - 8y' + 15y = 0 \quad 24. y'' - 6y' + 9y = 0 \quad 25. y'' + y' - 20y = 0$$

$$26. y'' - 4y' + 4y = 0 \quad 27. y'' - 5y' + 6y = 0 \quad 28. y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$29. y'' - 5y' + 4y = 0 \quad 30. y'' + 2y' - 8y = 0 \quad 31. y'' + 2y' + y = 0$$

$$32. y'' + 4y' + 4y = 0 \quad 33. y'' - 2y' + 10y = 0 \quad 34. 4y'' + 4y' + y = 0$$

$$35. y'' + 6y' + 13y = 0 \quad 36. y'' - 7y' + 10y = 0 \quad 37. y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$38. y'' + 3y' + 2y = 0 \quad 39. y'' - 5y' + 4y = 0 \quad 40. y'' + 2y' - 8y = 0$$

Домашнє завдання:

[5], с. 282

[4], с. 470

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Мета сформувати у студентів практичні навички знаходження загального і частинного розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 4 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	10хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	20хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття</i>
3 Основна частина	110хв	Головне місце приділяється <i>розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (письмове опитування), узагальненню висунутих положень</i>
4 Заклучна частина Домашнє завдання: [4], с. 466	20хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу</i>

Література

4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

1. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' - 4y' + 5y = 2\cos x + 6\sin x$$

Розв'язання

Знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Складаємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$D = 16 - 20 = -4$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$f(x) = 2\cos x + 6\sin x$ $\alpha = \pm i$ не є коренем характеристичного рівняння

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

$$y^{*'} = -A \sin x + B \cos x$$

$$y^{*''} = -A \cos x - B \sin x$$

Підставимо у початкове рівняння:

$$-A \cos x - B \sin x + 4A \sin x - 4B \cos x + 5A \cos x + 5B \sin x = 2\cos x + 6\sin x$$

$$\cos x(-A - 4B + 5A) + \sin x(-B + 4A + 5B) = 2\cos x + 6\sin x$$

$$4A - 4B = 2$$

$$4B + 4A = 6$$

$$A = 1 \quad B = \frac{1}{2}$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

2. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' + 4y = 12\cos 2x$$

Розв'язання

Знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0$$

Складаємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 = -4$$

$$k_{1,2} = \pm 2i$$

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$f(x) = 12\cos 2x$$

$\alpha = \pm 2i$ є коренем характеристичного рівняння

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$y^{*'} = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$$

$$y^{*''} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x + (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)$$

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4A x \cos 2x - 4B x \sin 2x + 4A x \cos 2x + 4B x \sin 2x = 12\cos 2x$$

$$4B = 12$$

$$B = 3$$

$$-4A = 0 \quad A = 0$$

$$y^* = 3x \sin 2x$$

Загальний розв'язок рівняння: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 3x \sin 2x$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Розв'язання

Знаходимо розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

Складаємо його характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 2k - 8 = 0 \quad k_1 = 2, \quad k_2 = -4$$

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$$

$f(x) = (12x + 20)e^{2x}$, $k = 2$ (є коренем характеристичного рівняння)

$$y^* = x e^{2x} (Ax + B) = (Ax^2 + Bx) e^{2x}$$

$$y^{*'} = (2Ax + B) e^{2x} + (Ax^2 + Bx) 2e^{2x}$$

$$y^{*''} = 2A e^{2x} + (2Ax + B) 2e^{2x} + (2Ax + B) 2e^{2x} + (Ax^2 + Bx) 4e^{2x}$$

Підставивши в початкове рівняння отримаємо:

$$12Ax + 6B + 2A = 12x + 20$$

$$12A = 12 \quad A = 1$$

$$6B + 2A = 20 \quad B = 3$$

$$y^* = (x^2 + 3x) e^{2x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + (x^2 + 3x) e^{2x}$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 4C_2 e^{-4x} + (2x + 3) e^{2x} + (x^2 + 3x) 2e^{2x}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad C_1 = -C_2$$

$$y'(0) = 2C_1 - 4C_2 + 3 = 1 \quad 3 - 6C_2 = 1 \quad C_2 = \frac{1}{3} \quad C_1 = -\frac{1}{3}$$

Загальний розв'язок рівняння: $y = -\frac{1}{3} e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-4x} + (x^2 + 3x) e^{2x}$

4. Знайти загальні розв'язки наступних рівнянь:

$$1. \quad y'' - 2y' - 8y = -8x^2 + 4x + 7$$

$$2. \quad y'' - 6y' + 5y = (3x + 10)e^{-x}$$

$$3. \quad y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}$$

$$4. \quad y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$$

$$5. \quad y'' + 2y' + 2y = (x + 7)e^{-2x}$$

$$6. \quad y'' - 5y' = 30x - 11$$

$$7. \quad y'' - 3y' - 4y = (20x + 11)e^{-x}$$

$$8. \quad y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$$

$$9. \quad y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$$

$$10. \quad y'' + 3y' = -72 \sin 3x$$

$$11. \quad y'' + 2y' + y = 3 \cos x + 8 \sin x$$

$$12. \quad y'' + 25y = 40 \cos 5x$$

$$13. \quad y'' + 9y = 9 \cos 3x + 16 \sin 3x$$

$$14. \quad y'' - 8y' + 20y = 130 \sin 4x$$

$$15. \quad y'' + 5y' + 6y = 3$$

$$16. \quad y'' + y = 4e^x$$

$$17. \quad y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$$

$$18. y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$$

5. Знайти частинні розв'язки наступних рівнянь:

$$1. y'' - 5y' + 4y = (10x + 43)e^{-x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$2. y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3$$

$$3. y'' - 6y' = 18e^{6x} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -9$$

$$4. y'' + 4y = (6x + 5)e^{-2x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{3}{4}$$

Домашнє завдання: [4], с. 466

Практичне заняття

з навчальної дисципліни Диференціальні рівняння

Тема Розв'язування систем диференціальних рівнянь методом виключення

Мета узагальнити і систематизувати практичні навички студентів з теми: «Розв'язування систем диференціальних рівнянь методом виключення»

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

опорні конспекти, конспекти лекцій з даної теми.

Час – 2 години

План проведення практичного заняття

Структура практичного заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	10хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	20хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети, огляд головних питань практичного заняття
3 Основна частина	110хв	Головне місце приділяється розбору та розв'язуванню прикладів, поточному контролю (письмове опитування), узагальненню висунутих положень
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 487	20хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого матеріалу

Література

4. Дубовик, В.П. Вища математика: навч. посіб. для студентів вищ навч закл. [Текст] / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

Навчальні матеріали

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z, \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Розв'язання. Будемо шукати частинний розв'язок системи у вигляді $x = \alpha e^{kt}$, $y = \beta e^{kt}$, $z = \gamma e^{kt}$. Підставляючи ці функції та їх похідні у рівняння системи та скорочуючи її на e^{kt} , отримуємо систему

$$\begin{cases} -\alpha k + \beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha - \beta k + \gamma = 0, \\ 3\alpha + \beta - \gamma k = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Складаємо характеристичне рівняння, яке відповідає останній системі: $\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0$,

звідки $k^3 - 7k - 6 = 0$. Корені цього рівняння $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. Знайдемо частинний розв'язок, який відповідає кореню $k_1 = -1$. Для цього підставимо в останню систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

Згідно з виразом (2) числа $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ є розв'язком системи. Переносимо γ_1 вправо та, відкидаючи третє рівняння, знаходимо α_1 та β_1 : $\alpha_1 = 0, \beta_1 = -\gamma_1, \gamma_1 = \gamma_1$, де γ_1 будь-яке число. Нехай $\gamma_1 = 1$, отримаємо: $x_1 = 0, y_1 = -e^{-t}, z_1 = e^{-t}$.

Аналогічно знайдемо частинний розв'язок, який відповідає кореню $k_2 = -2$.

Підставимо $k_2 = -2$ у систему (8):

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + 2\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + \beta_2 + 2\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему з перших двох рівнянь, знаходимо α_2 та β_2 : $\alpha_2 = -\gamma_2, \beta_2 = \gamma_2$, $\gamma_2 = \gamma_2$, де γ_2 – будь-яке число. Нехай $\gamma_2 = 1$, отримаємо розв'язок, який відповідає кореню $k_3 = 3$. Підставимо $k_3 = 3$ у систему (28.3.8):

$$\begin{cases} -3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0 \\ 3\alpha_3 - 3\beta_3 + \gamma_3 = 0 \\ 3\alpha_3 + \beta_3 - 3\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Відкидаючи третє рівняння та розв'язуючи систему з перших двох рівнянь, знаходимо α_3 та β_3 : $\alpha_3 = \frac{2}{3}y_3$; $\beta_3 = y_3$; $y_3 = y_3$, де y_3 – будь-яке число.

Нехай $y_3 = 3$, отримаємо $\alpha_3 = 2$, $\beta_3 = 3$. Кореню $k_3=3$ відповідає розв'язок: $x_3 = 2e^{3t}$, $y_3 = 3e^{3t}$, $z_3 = 3e^{3t}$.

Загальний розв'язок заданої системи має вигляд

$$\begin{aligned}x &= -C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{3t}, \\y &= -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 3C_3 e^{3t}, \\z &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 3C_3 e^{3t}.\end{aligned}$$

1. Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y; \end{cases}$$

2.. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z, \\ \frac{dz}{dx} = -2y + 4z; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z, \\ \frac{dz}{dx} = -4y + 4z. \end{cases}$$

3. Розв'язати системи рівнянь:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y + t \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + \sin t \\ \dot{y} = -3x + 2y + \cos t \end{cases}$$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = x + 2y + e^t \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 5y + t^2 \\ \dot{y} = -5x + y + t - 4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 3 \\ \dot{y} = -x + 2y - 4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + e^t \\ \dot{y} = x + 4y + 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - \sin 5t \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - 3y + t \\ \dot{y} = 3x + 2y - 5 \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - t - 2 \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2t \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - y + e^t \\ \dot{y} = 17x + 2y - e^{-t} \end{cases}$
11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y \\ \dot{y} = 2y + \sin t \end{cases}$
12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \cos 3t \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2t \\ \dot{y} = -5x - y + 3t \end{cases}$
14. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - t^2 - 1 \\ \dot{y} = 5x + 5y - 2 \end{cases}$
15. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - e^{-t} \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2e^{-t} \end{cases}$
16. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = x + 5y - \cos t \end{cases}$
17. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y + 2t \\ \dot{y} = -x + 4y - t \end{cases}$
18. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2t \\ \dot{y} = -5x - y + 3t \end{cases}$
19. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 17y + t^2 \\ \dot{y} = -2x - 3y - t \end{cases}$
20. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^t \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^t \end{cases}$
21. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + t^2 \\ \dot{y} = -2x - 3y \end{cases}$
22. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y + e^t \\ \dot{y} = x + 4y + 2 \end{cases}$
23. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - \cos t \\ \dot{y} = 4x + 2y + 2 \end{cases}$
24. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + t - 2 \\ \dot{y} = 3x + 4y + 3 \end{cases}$
25. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 8y + e^{2t} \\ \dot{y} = -2x - 2y - 3e^{2t} \end{cases}$
26. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + e^{2t} \\ \dot{y} = 2x - 2y + \end{cases}$
27. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + e^{-2t} \\ \dot{y} = 5x - 2y + 4 \end{cases}$
28. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + e^t \\ \dot{y} = -5x + 5y + 3e^t \end{cases}$
29. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - \cos t \\ \dot{y} = 4x + 2y + 2 \end{cases}$
30. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - t - 2 \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2t \end{cases}$